SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

F. NARDINI

PERTURBAZIONE DI ALCUNI PROPAGATORI DI OPERATORI DI SCHRÖDINGER

Bologna, 28 FEBBRAIO 1985

1. INTRODUZIONE

Nel presente seminario esporremo un risultato di perturbazione del propagatore associato ad alcuni operatori di Schrödinger H_0 quando ad H_0 si aggiunga un potenziale V limitato con deviate che tendono a zero all'infinito. Tratteremo successivamente i casi in cui l'operatore H_0 è definito da una delle seguenti espressioni:

(1) $$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta \qquad D(H_0) = W^2(R^n)$$

(2) $$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2 \qquad D(H_0) = B^2(R^n)$$

(3) $$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \omega_r^2 x_r^2 \qquad D(H_0) = B^2(R^n)$$

(4) $$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \omega_r^2 x_r^2 + \sum_{r=1}^{n} x_r f_r(t) \qquad D(H_0) = B^2(R^n);$$

se $s \in R^+$ $B^s(R^n)$ indica lo spazio di tutte le funzioni $f \in L^2(R^n)$ tali che

$$(1+|x|^2)^{s/2} f \in L^2(R^n) \qquad e \qquad (1+|\xi|^2)^{s/2} f \in L^2(R^n)$$

mentre $B^{-s}(R^n) = (-\Delta + |x|^2)^{s/2} L^2(R^n)$ è il suo duale, la funzione f(t) che compare in (4) è una funzione differenziabile con continuità in R a valori in R^n; osserviamo espressamente che, contrariamente a quanto avviene nei primi tre casi, nel caso (4) l'operatore dipende in maniera esplicita dal tempo.

Il nostro obbiettivo è quello di scrivere un'espressione esplicita del nucleo di Schwartz del propagatore di $H = H_0 + V$ (o di $H(t) = H_0(t)+V$)

e di studiarne le singolarità.

L'interesse fisico dei quattro operatori proposti è ben noto [11]: essi sono infatti rispettivamente gli operatori di Schrödinger della particella libera, dell'oscillatore armonico isotropo, dell'oscillatore sottoposto all'azione di un termine forzante f che dipende dal tempo. Osserviamo anche che le hamiltoniane classiche relative ai moti considerati sono tutte integrabili ed il moto classico è periodico nel caso 2), quasi periodico nel caso 3) mentre nel caso 4) si produce il noto fenomeno della risonanza quando la forza esterna f è periodica con periodo opportuno. E' altresì ben noto che l'aggiunta del potenziale V alla hamiltoniana classica generalmente distrugge la proprietà di quest'ultima di essere integrabile; pertanto il moto classico cessa di essere quasi periodico ed assume una complessità che lo rende radicalmente differente da quello che si verifica in assenza del potenziale V. E' interessante notare che questo cambiamento del modo classico sembra non riflettersi in un cambiamento paragonabile di quello quantistico non solo per il fatto ben noto che nell'uno come nell'altro caso lo spettro dell'operatore di Schrödinger è discreto, ma anche per il fatto, che dimostreremo in seguito, che le singolarità del nucleo del propagatore sono sostanzialmente invarianti.

Questo prova ancora una volta che il problema di caratterizzare l'integrabilità di una hamiltoniana dal punto di vista della meccanica quantistica è oltremodo sottile e richiede probabilmente la considerazione di fenomeni ancora poco noti (distanza fra autovalori successivi etc.).

2. ESISTENZA DEL PROPAGATORE

Ricordiamo anzitutto che, data una famiglia fortemente continua $A(t)$ $t \in R$ di operatori chiusi in uno spazio di Hilbert H, si chiama propagatore [11: ch X § 12] generato dalla famiglia $A(t)$ una famiglia a due parametri $U(t,s)$ $t, s \in R$ di operatori limitati in H con le seguenti proprietà

i) l'applicazione $(t,s) \to U(t,s)$ è fortemente continua

ii) $U(t,s)\, U(s,r) = U(t,r)$

iii) Per ogni $x \in D(A(s))$ risulta $U(t,s)\, x \in D(A(t))$ $t > 0$ e la funzione $t \to U(t,s)x$ è soluzione del problema di Cauchy astratto

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u & t > s \\ u(s) = x \end{cases}$$

il propagatore si dice unitario se $U(t,s)$ è un operatore unitario $\forall t,s$.

Se $A(t) = -iH$ con $H = H_0 + V$ essendo H_0 uno degli operatori descritti da 1), 2), 3) e V un potenziale limitato, evidentemente $A(t)$ è indipendente dal tempo e inoltre H è autoaggiunto in $L^2(R^n)$ [11: th. X.28 e 6: ch V th 4.3]; dunque il propagatore $U(s,t)$ generato da $-iH$ altro non è che il gruppo di operatori unitario $e^{-i(t-s)H}$ generato dall'operatore H la cui esistenza è assicurata dal teorema di Stone [16: ch IX § 9]. Nel caso $A(t) = -iH(t)$ con $H(t) = H_0(t) + V$ (essendo $H_0(t)$ l'operatore definito da 4) e V ancora un potenziale limitato), l'esistenza del propagatore può essere provata mediante il seguente teorema.

Teorema 1. (Kato) [16: ch. XIV, § 4, th. 1].

Sia H uno spazio di Hilbert ed I un intervallo aperto di R. Sia

$A(t)$ $t \in I$ una famiglia di operatori chiusi che goda delle seguenti proprietà

1) Il dominio di $A(t)$ è denso ed indipendente da $t \in I$

2) $A(t)$ è generatore infinitesimale di un semigruppo di contrazione $\forall t \in I$

3) L'operatore $(t-s)^{-1}$ $(A(t)A(s)^{-1}-I)$ è uniformemente fortemente continuo ed uniformemente limitato in t ed s per $t \neq s$ quando t ed s variano in un generico sottointervallo compatto di I.

4) Esiste $\lim_{s \to t} (t-s)^{-1} (A(t)\ A(s)^{-1} -I)\ \phi = C(t)\phi$ $\phi \in H$ uniformemente per t in un compatto e l'operatore $C(t)$ risulta limitato e fortemente continuo

Allora esiste il propagatore $U(t,s)$ generato dalla famiglia $A(t)$, $t \in I$.

Come questo teorema si applica nel caso del propagatore generato dalla famiglia $-iH_0(t)$ $t \in R$ è presto detto [11: ch. X th. X.71] : la famiglia $A(t) = -i(H_0(t)+d)$ $t \in R$ soddisfa evidentemente le ipotesi del teorema giacché $\sigma(A(t)) \subseteq \{iy;\ y < 0\}$ se d è opportuno; sono quindi soddisfatte le 1 e 2 mentre 3 e 4 sono soddisfatte in forza delle ipotesi di regolarità fatte sulla funzione f. Detto ora $\tilde{U}(t,s)$ il propagatore generato da $A(t)$ è immediato verificare che $U(t,s) = e^{id(t-s)}\tilde{U}(t,s)$ è il propagatore unitario generato da $H(t)$.

Nel seguito esprimeremo il propagatore $U(t,s)$ generato da $H(t)$ mediante il suo nucleo di Schwartz $k(t,s,x,y)$ nella nota forma [14: ch. I § 2]

$$U(t,s)\phi(x) = \int_{R^n} k(t,s,x,y)\ \phi\ (y)\ dy \qquad \phi \in L^2(R^n),$$

dove l'integrale è in generale da intendersi nel senso delle distribuzio

ni. Indicheremo poi con $k(t,x,y)$ il medesimo nucleo quando H non dipende da t ed $s = 0$.

Come abbiamo già accennato nell'introduzione il nostro obbiettivo è di determinare il fronte d'onda della distribuzione $x \to k(t,s,x,y)$ quando t,s,y sono fissati. Osserviamo che da 5) con $-iH(t)$ in luogo di $A(t)$ si ottiene subito che, fissati s ed y, il nucleo $k(t,s,x,y)$ soddisfa le seguenti equazioni

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} k(t,s,x,y) = -iH(t)\, k(t,s,x,y) \\ k(s,s,x,y) = \delta(x-y) \end{cases}$$

3. ESPRESSIONI ESPLICITE PER IL NUCLEO DEL PROPAGATORE

Per giustificare il metodo apparentemente "atipico" con cui giungeremo ad un'espressione esplicita di $k(t,s,x,y)$ esaminiamo brevemente alcuni risultati ottenuti nella medesima direzione prima del lavoro di Zelditch [17].

Il primo tentativo di scrivere espressamente il nucleo di Schwartz $k(t,s,x,y)$ del propagatore $U(t,s)$ generato da un operatore di Schrödinger fu compiuto da Feynman nel celeberrimo lavoro del 1948 [2] (cfr. anche [3]) con l'introduzione dell'integrale che da lui prese il nome: fra i molti lavori che da allora si sono susseguiti nel tentativo di dare una formulazione matematica rigorosa ai risultati di Feynman citeremo in primo luogo quello di Fujiwara (1979) [4] che riguarda precisamente operatori del tipo che stiamo trattando.

Sia $V: R_t \times R^n_x \to R$ una funzione misurabile di classe C^∞ rispet

to ad $x \in R^n$ tale che per ogni multiindice α con $|\alpha| \geqq 2$ la funzione

$$(6) \qquad M_\alpha(t) = \sup_{x \in R^n} |D_x^\alpha V(t,x)| + \sup_{|x|<1} |V(t,x)|$$

sia essenzialmente limitata sui compatti di R. Consideriamo l'operatore di Schrödinger dipendente dal tempo

$$(7) \qquad H(t) = -\frac{1}{2}\Delta + V(t,x) \qquad D(H(t)) = B^2(R^n)$$

e la hamiltoniana classica corrisponde ad $H(t)$

$$(8) \qquad \mathcal{H}(t,x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(t,x);$$

si chiama azione classica la funzione [4: § 2]

$$(9) \qquad S(t,s,x,y) = \int_s^t \mathcal{L}(\tau,x(\tau),\dot{x}(\tau))d\tau:$$

qui $\mathcal{L}(t,x,\alpha)$ è la lagrangiana corrispondente alla hamiltoniana (8) mediante la trasformazione di Legendre mentre la funzione $t \to x(t)$ è soluzione delle equazioni di Hamilton

$$(10) \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi}(t,x,\xi) \\ \dot{\xi} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t,x,\xi) \end{cases}$$

con le condizioni $x(s) = y \quad x(t) = x$ (per la prova dell'esistenza ed unicità di tale soluzione almeno per i t per cui $(t-s)$ è piccolo si veda [4: § 1]).

Poniamo

$$E(t,s)\phi(x) = (2\pi i(t-s))^{-n/2} \int_{R^n} e^{iS(t,s,x,y)}\phi(y)\, dy \tag{11}$$

e

$$E_k(t,s) = E(t,t_{k-1}) \ldots E(t_2,t_1)E(t_1,s) \tag{12}$$

essendo $t_j = s + \frac{t-s}{k} j$ $j = 1, \ldots, k-1$. Allora vale il seguente teorema

Teorema 2. (Fujiwara) [4: § 5 th. 1].

Sotto le ipotesi precedentemente dichiarate per il potenziale $V(t,x)$, esiste il propagatore unitario $U(t,s)$ generato dall'operatore $H(t)$ e

$$\|U(t,s) - E_k(t,s)\| \leqq C|t-s| \frac{1}{k} \quad \text{per } k >> 1 \tag{13}$$

essendo C una costante che dipende solamente dalla funzione (6).

La velocità di convergenza di (13) può essere migliorata introducendo nell'integrale (11) un opportuna ampiezza [4: § 5 th. 2].

Fujiwara ha provato anche che, sotto le ipotesi del teorema 2, se t-s è sufficientemente piccolo l'azione classica è della forma [4: § 2 Prop. 2.4]

$$S(t,s,x,y) = \frac{1}{2} \frac{|x-y|^2}{t-s} + (t-s)\, w(t,s,x,y)$$

essendo w una funzione di classe C^∞ tale che per ogni coppia di multiindici α, β con $|\alpha| + |\beta| \geqq 2$ risulta

$$|D_x^\alpha D_y^\beta \; w(t,s,x,y)| \leqq C_{\alpha,\beta}$$

ove la costante $C_{\alpha,\beta}$ non dipende da (t,s) ne da (x,y).

Nel caso di un potenziale V indipendente dal tempo e che sia un polinomio nelle $x_1,\dots,x_n$ tale che(*) $V(x) \sim |x|^2$ per $x \to +\infty$ Chazarain [1] ed Helffer Robert [7] (cfr. anche [8] e [9]) hanno approssimato il nucleo integrale $k(t,x,y)$ del gruppo unitario e^{-itH} mediante un integrale oscillante.

Teorema 3. [7 : § III]

Per ogni naturale N esiste un operatore

$$U_N(t)\, f(x) = \iint e^{iS(t,x,y,\theta)}\, a_N(t,x,\theta)\, X_\varepsilon(x,\theta)\, f(y)\, dy d\theta \tag{14}$$

tale che

$$\begin{cases} (i \dfrac{\partial}{\partial t} - H)\, U_N(t) = R_N(t) \\ \\ U_N(0) \qquad\qquad = I + K_N \end{cases}$$

essendo K_N un operatore con nucleo in $S(R^n \times R^n)$ ed $R_N \in C^j(]-T,T[, L(B^{-s}, B^s))$ se N è sufficientemente grande (in funzione di j ed s).

Di più si può dimostrare che [9: § 4 Prop. 4.5]

$$U(t) - U_N(t) \in C^j\, (]-T,T[,\, L(B^{-s}, B^s))$$

sempre se N è sufficientemente grande.

Il teorema precedente sembra suggerire la strada di studiare $k(t,x,y)$ mediante la sua approssimazione data da (14) nella forma

(*) In [9] i risultati sono stati estesi al caso $V(x) \sim |x|^{2k}$ per $x \to +\infty$ $(k \in N)$.

$$(15) \qquad k_N(t,x,y) = \int e^{iS(t,x,y,\theta)} a_N(t,x,\theta)\, X_\varepsilon(x,\theta)\, d\theta;$$

tuttavia $k_N(t,x,y)$ non risulta essere una distribuzione integrale di Fourier nel senso ordinario [14: ch. VIII def. 3.3] giacché la fase S che compare in (14) e (15) è della forma

$$S(t,x,y,\theta) = S_2(t,x,\theta)-y\theta + S_1(t,x,\theta)$$

essendo $S_i(t,x,\theta)$ una funzione omogenea di grado i rispetto ad (x,θ). Questo ha come immediata conseguenza il fatto che, fissati t ed y la varietà lagrangiana associata alla fase $(x,\theta) \to S(t,x,y,\theta)$ [14 ch. VIII, § 1]

$$\Lambda_{t,y} = \{(x,\xi),\ \xi = \nabla_x S(t,x,y,\theta) \quad , \quad \nabla_\theta S(t,x,y,\theta) = 0\}$$

non è conica né valgono in questo caso le relazioni [14: ch. VIII, prop. 3]

$$(16) \qquad \begin{aligned} & WF(k_N(t,.,y)) \subseteq \Lambda_{t,y} \\ & WF(U_N(t)\phi) \subseteq \Phi^t\, WF(\phi) \end{aligned}$$

essendo $t \to \phi^t(x,\xi)$ il flusso hamiltoniano generato dalla funzione (8) (cioè la soluzione delle equazioni (10) con la condizione iniziale $\Phi^o(x,\xi) = (x,\xi)$).

4. REGOLARITA' DEL NUCLEO PER (t-s) PICCOLO

D'altra parte le relazioni (16) sono prive d'interesse almeno per $|t-s|$ sufficientemente piccolo a motivo del seguente risultato.

Teorema 4. (Fujiwara) [5: th. 1]

Sotto le stesse ipotesi del teorema 2, se $|t-s|$ è sufficientemente piccolo, il nucleo di Schwartz dell'operatore $E_k(t,s)$ converge uniformemente sui compatti con tutte le derivate al nucleo di Schwartz del propagatore unitario $U(t,s)$.

Questo prova fra l'altro che è ragionevole aspettarsi che la regolarità del nucleo $k(t,s,x,y)$ possa venir meno quando $|t-s|$ non è piccolo. A tal fine ricordiamo che l'espressione esplicita di tale nucleo è nota per ciascuno degli operatori definiti in 1), 2), 3) e 4); in ciascuno di questi casi infatti l'azione classica (9) si calcola esattamente e risulta essere un polinomio di secondo grado in x ed y; questo fatto permette di ricondurre l'integrale di Feynman all'integrale di una gaussiana [3: ch. 3, § 1 e § 6].

Nel caso $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ risulta

$$(17) \qquad k_0(t,x,y) = (2\pi i\, t)^{-n/2}\, e^{i\frac{|x-y|^2}{2t}} \qquad t > 0$$

Nota: Ricordiamo che i nuclei (17), (18) e (19) possono essere ottenuti anche con procedimenti che prescindono dall'integrale di Feynman. In particolare (17) può essere ottenuto applicando la trasformata di Fourier rispetto alle variabili spaziali x nelle (5)', risolvendo il problema di Cauchy ordinario rispetto alla variabile t ed applicando infine la trasformata inversa di Fourier (cfr. [13: ch. 3 th. 3.14]).

nel caso $H_o = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$ risulta

$$(18) \qquad k_o(t,x,y) = (2\pi i \operatorname{sen} t)^{-n/2}\, e^{\frac{i}{\operatorname{sen} t}\left(\cos t \frac{|x|^2+|y|^2}{2} - xy\right)}$$

$t \neq m\pi \qquad m = 1,2,\ldots$

Nel caso $H_o = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \omega_r^2 x_r^2$ risulta

$$(19) \qquad k_o(t,x,y) = \prod_{r=1}^{n} \sqrt{\frac{\omega_r}{2\pi i \operatorname{sen}(\omega_r t)}}\; e^{i\sum_{r=1}^{n} \frac{\omega_r}{\operatorname{sen}(\omega_r t)}\left(\cos(\omega_r t)\frac{x_r^2+y_r^2}{2} - x_r y_r\right)}$$

per $t \neq m\frac{\pi}{\omega_r}$ $\quad r = 1,\ldots, n, \; m = 0,1,\ldots$

Per quanto riguarda (18) e (19) è sufficiente osservare che in tal caso

$$(21) \qquad k_o(t,x,y) = \bigotimes_{r=1}^{n} k_{o,r}(t,x_r,y_r)$$

essendo $k_{o,r}(t,x_r,y_r)$ il nucleo di Schwartz del propagatore generato dal l'operatore unidimensionale

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx_r^2} + \omega_r^2 x_r^2 \qquad x_r \in R,$$

se $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ denotano gli autovalori (tutti semplici) di tale operatore e $\phi_1(x_r)$, $\phi_2(x_r),\ldots$ le relative autofunzioni (che sono notoriamente le funzioni di Hermite), allora

$$(22) \qquad k_{o,r}(t,x_r,y_r) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-it\lambda_j}\, \phi_j(x_r)\overline{\phi_j(y_r)}$$

infine nel caso $H_0(t) = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\omega_r^2 x_r^2 + \sum_{r=1}^{n} f_r(t)\, x_r$ risulta

$$(20) \qquad k_0(t,s,x,y) = \prod_{r=1}^{n}\sqrt{\frac{\omega_r}{2\pi i\ \mathrm{sen}(\omega_r(t-s))}}\ e^{iS(t,s,x,y)}$$

con

$$S(t,s,x,y) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\omega_r}{\mathrm{sen}\ (\omega_r(t-s))}\ [\cos(\omega_r(t-s))\ \frac{x_r^2 + y_r^2}{2} - x_r\, y_r +$$

$$+ \frac{x_r}{\omega_r}\int_s^t f_r(\tau)\ \mathrm{sen}(\omega_r(\tau-s))d\tau + \frac{y_r}{\omega_r}\int_s^t f_r(\tau)\ \mathrm{sen}(\omega_r(t-\tau))\ d\tau$$

$$- \frac{1}{\omega_r^2}\int_s^t\int_s^\tau f_r(\tau)\ f_r(\sigma)\ \mathrm{sen}\ (\omega_r(t-\tau))\ \mathrm{sen}(\omega_r(\sigma-s))d\sigma\ d\tau\ ]$$

per $t-s \neq m\ \frac{\pi}{\omega_r} \qquad r = 1,\ldots,n \qquad m = 0,1,\ldots$

E' evidente che quando il nucleo $k_0(t,x,y)$ è definito da (17) la funzione $x \to k(t,x,y)$ è di classe C^∞ per ogni t,y. Consideriamo ora il nucleo definito da (18) nel caso unidimensionale $x \in R$ (cfr. (23) con $\omega_r = 1$); se $t = m\pi$ si può esprimere $k_0(m\pi, x,y)$ mediante la proprietà di gruppo di e^{-itH_0} scrivendo

$$(24) \qquad k_0(m\pi,x,y) = \int_R k_0((m-\tfrac{1}{2})\pi,\ x,z)\ k_0\ (\tfrac{1}{2}\ \pi,z,y)dz$$

Una ben nota formula di Mehler [12: ch. 5, th. 5.1 e probl. 23] permette di sommare la serie (22) ottenendo

$$(23) \quad k_{o,r}(t,x_r,y_r) = \sqrt{\frac{\omega_r}{2\pi i\ \mathrm{sen}(\omega_r t)}}\ e^{i\frac{\omega_r}{\mathrm{sen}(\omega_r t)}\left(\cos(\omega_r t)\frac{x_r^2+y_r^2}{2} - x_r y_r\right)}.$$

onde

$$k_o(m\pi,x,y) = \int_R (2\pi i(-1)^{m-1})^{-\frac{1}{2}} e^{i(-1)^m xz} (2\pi i)^{-1/2} e^{-izy} dz =$$

(25)

$$= ((-1)^m)^{-1/2} \quad \delta((-1)^m x-y)$$

Ecco dunque apparire una singolarità della distribuzione $x \to k_o(m\pi,x,y)$ in $x = (-1)^m y$. Da (25) e (21) segue che quando il nucleo è dato da (18) la funzione $x \to k(t,x,y)$ ha singolarità se e solo se $t = m\pi$ cioè nei multipli interi della metà del periodo del moto classico; analogamente quando il nucleo è dato da (19) la medesima funzione ha singolarità se e solo se $t = \frac{m\pi}{\omega_r}$ $r = 1,\dots,n$ $,m = 0,1, \dots$ cioè nei multipli interi della metà dei quasi periodi del moto classico.

Quando il nucleo è dato da (20) un calcolo analogo a quello che ha condotto a (25) mostra che nel caso unidimensionale

$$k_o(s + \frac{m\pi}{\omega}, s, x, y) = \alpha \ \delta(y-(-1)^m x - \omega^{-1}\int_s^{s+\frac{m\pi}{\omega}} f(\tau) \ \text{sen}(\omega(\tau-s))d\tau) \tag{26}$$

essendo α una costante complessa con $|\alpha|=1$ [10: §2]. (26) prova che in quest'ultimo caso le singolarità della distribuzione $x \to k_o(t,s,x,y)$ si hanno per i medesimi valori di t ($t = s + \frac{m\pi}{\omega_r}$ $r = 1,\dots,n$, $m = 0,1,2\dots$) per cui si hanno nel caso autonomo precedente ($f = 0$), esse risultano però spostate di

$$(-1)^m \ \omega_r^{-1}\int_s^{s+\frac{m\pi}{\omega_r}} f_r(\tau) \ \text{sen}(\omega_r(\tau-s))d\tau \tag{27}$$

5. METODO PERTURBATIVO E DETERMINAZIONE DELLE SINGOLARITA'

Contrariamente a quanto accennato a proposito dei risultati ottenuti da Fujiwara, Chazarain ed Helffer Robert, Zelditch [17] perviene ad una espressione esplicita del nucleo di Schwartz $k(t,x,y)$ del propagatore $U(t)$ generato dall'operatore $H = H_0 + V$ partendo dal nucleo $k_0(t,x,y)$ del propagatore $U_0(t)$ generato da H_0 ed utilizzando un metodo di perturbazione.

Esaminiamo dapprima il caso $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$. In questo caso il seguente teorema assicura che se $V \in B(R^n)$ (ha tutte le derivate limitate) allora la funzione $x \to k(t,x,y)$ è di classe C^∞ per ogni t ed y.

Teorema 5. [17: th. 1].

Sia $V \in B^{k+6([\frac{n}{2}]+1)}(R^n)$ allora

$$k(t,x,y) = a(t,x,y)\, k_0(t,x,y)$$

ove $a \in B^k(R^n_x \times R^n_y)$ per ogni $t \in R$. Qui abbiamo indicato con $B^k(R^n)$ lo spazio di tutte le funzioni limitate con derivate limitate fino all'ordine k ($\in N$).

Diamo un cenno della dimostrazione che mutatis mutandis si può ripetere anche negli altri casi in esame.

Dalla (5) con $-iH$ in luogo di $A(t)$ si ottiene (cfr. [11:ch. X § 12 (X.163)]).

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right) U(t) = V\, U(t)$$

di qui segue la formula di Duhamel

$$U(t) = U_0(t) + (-i)\int_0^t U_0(t-s) V\, U(s)\, ds.$$

Scrivendo $U_0(t-s) = U_0(t)U_0(s)^{-1}$ ed iterando si ottiene lo sviluppo di Dyson [11 ch. X § 12 (X.129)]

$$(29) \qquad U(t)= U_0(t) + \sum_{l=1}^{\infty}(-i)^l \int_0^t \dots \int_0^{s_{l-1}} U_0(t)\ (U_0(s_1)^{-1}V\ U_0(s_1)) \dots$$

$$\dots (U_0(s_l)^{-1}V\ U_0(s_l))\, ds_1 \dots ds_l$$

Cominciamo col calcolare il nucleo di Schwartz di $U(s_j)^{-1}\ VU(s_j)$

$$U(s_j)^{-1}V\ U(s_j)\phi(z_j) = \int_{R^n}\int_{R^n} (2\pi i s_j)^{-n}\ e^{\left(-\frac{|z_j-w_j|^2}{2s_j} + \frac{|z_{j+1}-w_j|^2}{2s_j}\right)}$$

$$\cdot\ V(w_j)\phi(z_{j+1})\ dw_j\ dz_{j+1}$$

Ora la fase si può scrivere

$$-\frac{|z_j-w_j|^2}{2s_j} + \frac{|z_{j+1}-w_j|^2}{2s_j} = \frac{(z_{j+1}-z_j)}{s_j}\left(\frac{(z_{j+1}+z_j)}{2} - w_j\right) =$$

$$= (z_{j+1} - z_j)\ \xi_j(s_j, z_{j+1}, z_j, w_j)$$

Operando il cambiamento di variabile da w_j a ξ_j ed osservando che lo Jacobiano di tale cambiamento è

$$\left|\frac{\partial w_j}{\partial \xi_j}\right| = s_j^n ,$$

si ottiene

$$U_o(s_j)^{-1}\, V\, U_o(s_j)\phi(z_j) = (2\pi\, i)^{-n} \int_{R^n}\int_{R^n} e^{i(z_{j+1}-z_j)\xi_j}$$

$$V(\frac{z_{j+1}+z_j}{2} - s_j\, \xi_j)\ \phi(z_{j+1})\ dz_{j+1} d\xi_j$$

Siamo ora in grado di calcolare il termine l-esimo della serie che compare in (29).

$$\int_0^t \dots \int_0^{s_{l-1}} \Big[\int_{R^n}\int_{R^n} \dots \int_{R^n}\int_{R^n} (2\pi i t)^{-n/2}\ e^{i\frac{|x-z_1|^2}{2t}} \tag{30}$$

$$.\ (2\pi i)^{-n}\ e^{i(z_2-z_1)\xi}\ .\ V(\frac{z_2+z_1}{2} - s_1\, \xi_1) \dots .$$

$$.\ (2\pi i)^{-n}\ e^{i(y-z_l)\xi_l}\ \ V(\frac{y+z_l}{2} - s_l\, \xi_l)$$

$$dz_1\, d\xi_1 \dots dz_l\, d\xi_l \Big]\ ds_1 \dots ds_l\ .$$

Sviluppiamo ora la fase

$$\Phi_l(t,x,\vec{z},\vec{\xi},y) = \frac{|x-z_1|^2}{2t} + (z_2 - z_1)\xi_1 + \dots + (y-z_l)\xi_l$$

nell'intorno di un suo punto critico, precisamente $\nabla_{\vec{z},\vec{\xi}}\ \Phi_l = 0$ se e solo se

$$z_1 = \dots = z_l = y \quad e \quad \xi_1 = \dots = \xi_l = \frac{x-z_1}{t} = \frac{x-y}{t} = \tilde{\xi}\ ;$$

in un tal punto

$$\mathrm{Hess}_{\Phi_1} = \begin{bmatrix} \vec{z} - y \\ \\ \vec{\xi} - \tilde{\xi} \end{bmatrix} \quad ;$$

dunque

$$\Phi_1(t,x,\vec{z},\vec{\xi},y) = \frac{|x-y|^2}{2t} + \frac{1}{2}\,\frac{|z_1-y|}{t} + ((z_2-y)-(z_1-y))(\xi_1-\tilde{\xi}) + \dots$$

$$+ (-(z_1-y))(\xi_1-\tilde{\xi}).$$

Operando il cambiamento di variabile $\bar{z}_j = z_j - y \quad \bar{\xi}_i = \xi_j - \tilde{\xi}$ l'espressione (30) diviene

$$(2\pi i t)^{-n/2}\, e^{\frac{i|x-y|}{2t}}\; a_1(t,x,y) = k_o(t,x,y) \quad a_1(t,x,y)$$

essendo

$$a_1(t,x,y) = \int_o^t \dots \int_o^{s_{1-1}} \Big[\iint \dots \iint e^{i\left(\frac{1}{2}\,\frac{|\bar{z}_1|^2}{t} + (\bar{z}_2-\bar{z}_1)\bar{\xi}_1 + (-\bar{z}_1)\bar{\xi}_1\right)}$$

$$(2\pi i)^{-n1} \prod_{j=1}^{1} V\left(\frac{\bar{z}_{j+1}+\bar{z}_j}{2} - s_j\,\bar{\xi}_j + \frac{t-s_j}{t}\,y + \frac{s_j}{t}\,x\right)$$

$$d\bar{z}_1\, d\bar{\xi}_1 \dots d\bar{z}_1\, d\bar{\xi}_1 \Big]\, ds_1 \dots ds_1 \,.$$

Ometteremo a questo punto la parte tecnica della dimostrazione che consiste nella prova che la serie

$$1 + \sum_{1=1}^{\infty} a_1 \; (t,x,y)$$

converge ad una funzione di $B^k(R^n_x \times R^n_y)$ per ogni t e rimandiamo per questo direttamente a [17].

Esaminiamo ora il caso $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$. Nel seguito S^0 denoterà la classe di Hormander dei simboli di ordine 0 e di tipo (1.0). Indicheremo nel seguito con $IS^0(R^n_x \times R^n_\xi \times R^n_y)$ lo spazio delle funzioni di classe C^∞ tali che per ogni scelta di tre multiindici α, β, γ e per ogni $\rho \in [0,|\alpha|]$ esiste una costante $A^\rho_{\alpha,\beta,\gamma}$ tale che

$$(31) \quad |D^\alpha_x D^\beta_\xi D^\gamma_y a(x,\xi,y)| \leq A^\rho_{\alpha,\beta,\gamma} (1+|x|^2)^{-\rho/2} (1+|\xi|^2)^{\rho/2} (1+|y|^2)^{\rho/2}$$

per ogni $\rho \in [0,|\beta|]$ esiste una costante $B^\rho_{\alpha,\beta,\gamma}$ tale che

$$(32) \quad |D^\alpha_x D^\beta_\xi D^\gamma_y a(x,\xi,y)| \leq B^\rho_{\alpha,\beta,\gamma} (1+|x|^2)^{\rho/2}(1+|\xi|^2)^{-\rho/2}(1+|y|^2)^{\rho/2}$$

e per ogni $\rho \in [0,|\gamma|]$ esiste una costante $C^\rho_{\alpha,\beta,\gamma}$ tale che

$$(33) \quad |D^\alpha_x D^\beta_\xi D^\gamma_y a(x,\xi,y)| \leq C^\rho_{\alpha,\beta,\gamma} (1+|x|^2)^{\rho/2} (1+|\xi|^2)^{\rho/2} (1+|y|^2)^{-\rho/2}$$

<u>Lemma</u>. [17: lemma 2.I e lemma 2. II].

Se $V \in S^0$, il nucleo $k(t,x,y)$ del propagatore $U(t)$ generato dall'operatore $H = H_0+V$ è dato da

$$(34) \quad k(t,x,y) = k_0(t,x,y)\, a(t,x,y) \quad \text{se} \quad t \neq m\pi \quad m = 0,1,\ldots$$

$$(35) \quad k(m\pi,x,y) = \int e^{-i(x-(-1)^m y)\xi}\, \sigma(x,\xi,y)\, d\xi$$

essendo $a(t,.,.) \in IS^0(R^n_x \times R^n_y)$ e $\sigma \in IS^0(R^n_x \times R^n_\xi \times R^n_y)$.

La prova di (34) si ottiene modificando opportunamente quella di (28). La prova di (35) è immediata se si tiene conto di (34) e della proprietà di gruppo del propagatore e^{-itH} (cfr.(24)).

Teorema 6. [17: th. II]

Se $V \in S^0$ è il nucleo esaminato nel precedente lemma, esso soddisfa le seguenti

$$\text{sing supp } k(t,\cdot,y) = \phi \qquad \text{se } t \neq m\pi \quad m = 0,1,2,\dots \tag{36}$$

$$\text{sing supp } k(t,\cdot,y) = \{(-1)^m y\} \qquad \text{se } t = m\pi \quad m = 0,1,\dots \tag{37}$$

inoltre la distribuzione $x \to k(m\pi, x,y)$ è a decrescenza rapida per $|x| \to +\infty$.

Di più

$$WF(k(m\pi,.,y)) = \{(-1)^m y\} \times R^n \tag{38}$$

La (36) segue immediatamente da (34).

Per provare (37) integriamo per parti in (35) usando l'operatore

$$L = \frac{i^{-1}\,(x-(-1)^m y)\, D_\xi}{|x-(-1)^m y|^2}$$

allora

$$k(t,x,y) = \int_{R^n} e^{-i(x-(-1)^m y)\xi}\,(L^t)^r\,\sigma(x,\xi,y)d\xi \qquad t = m\pi \tag{39}$$

da (32) con $\rho = 1$ segue che

$$|L^t \sigma(x,\xi,y)| \leq C\ |x-(-1)^m y|^{-1}\ (1+|\xi|^2)^{-1/2}\ (1+|x|^2)^{1/2}\ (1+|y|^2)^{1/2}\ ;$$

iterando si ottiene

$$|(L^t)^{n+1}\ \sigma(x,\xi,y)| \leq C|x-(-1)^m y|^{-(n+1)}(1+|\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\ (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}\ (1+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}\ ;$$

questo mostra che l'integrale che compare in (39) è assolutamente convergente. Iterando ancora con $\rho = 0$ si ottiene

$$|(L^t)^{n+1+h}\ \sigma(x,\xi,y)| \leq C|x-(-1)^m y|^{-(n+1+h)}(1+|\xi|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\ (1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}\ (1+|y|^2)^{\frac{n+1}{2}}$$

Questo mostra che, comunque si fissi $y \in R^n$, la funzione $x \to k(m\pi,\ x,y)$ si maggiora in valor assoluto con $C|x|^h$ fuori da un intorno del punto $(-1)^m y$; dall'arbitrarietà della scelta di $h \in N$ segue la decrescenza rapida.

Concludiamo osservando che la funzione $x \to k(m\pi,x,y)$ non può essere di quadrato sommabile in un intorno del punto $(-1)^m y$, in questo caso infatti essa sarebbe una funzione di $L^2(R^n)$, ma allora tale sarebbe anche la funzione $U(-m\pi)k(m\pi,.,y)$ e ciò è impossibile giacché quest'ultima è $\delta(x-y)$; di qui segue (37).

Per la prova di (38) rimandiamo a [15].

Enunciamo senza dimostrazione i due teoremi relativi all'oscillatore anisotropo ed a quello forzato.

Teorema 7. [17: th. IV]

Sia $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} \omega_r^2 x_r^2$, $V \in S^0$ ed $H = H_0 + V$;

indichiamo ancora con $k(t,x,y)$ il nucleo di Schwartz del propagatore e^{-itH} generato dall'operatore H. Allora se i coefficienti ω_r $r = 1,\dots,n$ sono razionalmente indipendenti si ha

$$WF(k(t,.,y)) \subseteq WF\,(k_0(t,.,y))$$

cioè

$$WF(k(t,.,y)) = \phi \qquad \text{se } t \neq \frac{m\pi}{\omega_r} \quad r = 1,\dots,n \quad m = 0,1,\dots$$

$$WF(k(\frac{m\pi}{\omega_r},.,y)) \subseteq \{x \in R^n,\ x_r = (-1)^m y_r\} \times \{\xi\, e_r; \xi \in R\}$$

$e_r = (0,\dots,1,\dots,0)$

Teorema 8. [10].

Sia $H_0(t) = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\omega_r^2 x_r^2 + \sum_{r=1}^{n} x_r f_r(t)$, $V \in S^0$

ed $H(t) = H_0(t) + V$; indichiamo con $k(t,s,x,y)$ il nucleo di Scwhartz del propagatore $U(t,s)$ generato da $H(t)$. Allora se i coefficienti ω_r = $r=1,\dots,n$ sono razionalmente indipendenti si ha

$$WF(k(t,s,.,y)) \subseteq WF(k_0(t,s,.y))$$

Concludiamo con alcune osservazioni.

La condizione di razionale indipendenza dei coefficienti ω_r $r = 1\dots,n$ nei teoremi 7 ed 8 si presenta come tecnica, tuttavia questa difficoltà non può non richiamare alla mente quanto avviene perturbando il moto classico con l'introduzione del potenziale V. Il teorema di Kolmogorov Arnold e Moser mostra come i moti quasi periodici con fre-

quenze non razionalmente indipendenti (e quindi risonanti) siano i più sensibili ad una simile perturbazione, è quindi verosimile che la difficoltà incontrata sia in qualche modo legata a questo fenomeno, ma qui si ritorna al già accennato problema di caratterizzare gli operatori di Schrödinger che corrispondano ad Hamiltoniane classiche integrabili.

Una seconda osservazione riguarda il risultato del teorema 8 quando il termine forzante f è periodico. Da (26) segue che il nucleo $x \to k\,(s+\frac{m\pi}{\omega_r},s,x,y)$ ha una singolarità nel punto

$$(-1)^m\,(y+\frac{1}{\omega_r}\int_s^{s+\frac{m\pi}{\omega}} f_r(\tau)\,\mathrm{sen}\,(\omega_r(\tau-s))\,d\tau);$$

e quindi, come già abbiamo osservato nel § 4, si ritrova la singolarità del nucleo relativo al sistema autonomo ($f = 0$) spostata della quantità data da (27). Si può provare facilmente che se la r-esima componente f_r del termine forzante è periodica di periodo T e la frequenza ω_r propria del sistema è multiplo intero della frequenza $\frac{1}{T}$ di f_r risulta

$$\int_s^{s+\frac{m\pi}{\omega}} f_r(\tau)\,\mathrm{sen}(\omega_r(\tau-s))\,d\tau = m+O(1) \qquad \text{per } m \to \infty;$$

cioè la singolarità del sistema forzato oscilla intorno alla singolarità del sistema autonomo con ampiezza proporzionale al tempo $\frac{m\pi}{\omega_r}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHAZARAIN, J.: Spectre d'un Hamiltonien quantique et mechanique classique. Commun. P.D.E. 5, 595 (1980).

[2] FEYNMAN, R.P.: Space time approach to nonrelativistic quantum mechanics. Rev. Mod. Phys. 20,367 (1948).

[3] FEYNMAN, R.P.: HIBBS, A.R.: Quantum Mechanics and Path Integrals. Mc Graw-Hill, New York, 1965.

[4] FUJIWARA, D.: A construction of the fundamental solution for Schrodinger equation. J. d'Anal. Math. 35, 41 (1979).

[5] FUJIWARA, D.: Remarks on convergence of Feynman Path Integrals. Duke Math. J. 47, 559 (1980).

[6] KATO, T.: Perturbation Theory for Linear Operators. Springer Ver., New York, 1976.

[7] HELFFER, B., ROBERT, D.: Comportement asymptotique precise du spectre d'operateurs globalment elliptiques dans R^n. Seminaire Goulaouic-Meier-Schwartz,1980-81.

[8] HELFFER, B., ROBERT, D.: Comportement semi-classique du spectre des hamiltonies quantiques elliptiques. Amm. Inst. Fourier Grenoble 31, 169 (1981).

[9] HELFFER, B., ROBERT, D.: Proprietes asymptotiques du spectre d'operateurs pseudodifferentiels sur R^n. Commun. P.D.E. 7, 795 (1983).

[10] NARDINI, F.: Propagation of singularities for solutions of a class of non autonomons Schrödinger equations. In corso di pubblicazione sul BUMI.

[11] REED, M., SIMON, B.: Fourier Analysis and Selfadjointness. Acad. Press, New York, 1975.

[12] SZEGÖ, G.: Orthogonal Polynomials. A.M.S. Colloquium Publications XXIII, New York, 1939.

[13] TREVES, F.: Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients. Gordon and Breach, New York, 1966.

[14] TREVES, F.: Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. Plenum Press, New York, 1980.

[15] WEINSTEIN, A.: A symbol class for some Schrödinger equations in R^n. In corso di pubblicazione su Am. J. Math.

[16] YOSHIDA, K.: Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1974.

[17] ZELDITCH, S.: Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger equations. Commun. Math. Phys., 20, 1 (1983).